Ad-Soyad :

Numara :

MAT 201 Lineer Cebir I Bütünleme Sınavı Cevap Anahtarı 05.02.2023

Not: Sorular eşit puanlı ve süre 90 dakikadır. Çözümlerinizi ayrıntılı olarak yazınız. Öğrenmediğimiz yöntemlerle yapılan çözümler kabul edilmeyecektir. Başarılar dilerim.

1) Aşağıdaki soruları yanında bulunan parantez içine doğru ise “D”, yanlış ise “Y” yazarak cevaplayınız.

(Y) Her grup değişmeli gruptur (4 puan).

(D) Bir vektörün boyu iç çarpım fonksiyonuna göre değişir (4 puan).

(D) Herhangi bir cisimden bir vektör uzayı elde edilebilir (4 puan).

(D) Lineer bağımsız bir kümenin her alt kümesi de lineer bağımsızdır (4 puan).

(D) Her cisim bir halkadır (4 puan).

2) $U=\{(1,0,1),(1,-1,-1),(1,1,2)\}\subset\mathbb{R}^3$ kümesinden ortonormal bir küme elde ediniz (20 puan).

3) V, F cismi üzerinde n boyutlu bir reel iç çarpım uzayı, $y\in V$ olsun. $\forall x\in V$ için $\langle x,y\rangle=0_V$ ise $y=0_V$ olduğunu gösteriniz (20 puan).

4) P_n ile n. dereceden polinomların kümesi gösterilsin. Bu durumda, P_n reel sayılar cismi üzerinde vektör uzayı olur.

$L:P_2\to P_2,\ L(1)=1,\ L(t)=t^2,\ L(t^2)=t^3+t$ eşitliklerini sağlayan bir lineer dönüşüm olsun.

a) $L(2t^2-5t+3)=?$ (10 puan)

b) a, b, c birer reel sayı olmak üzere $L(at^2+bt+c)=?$ (10 puan)

5) $W=\{(1,-1,6),(0,1,-1),(0,0,-1)\}\subset\mathbb{R}^3$ alt kümesi veriliyor.

a) W lineer bağımsız mıdır? (8 puan)

b) W, $\mathbb{R}^3$ ü gerer mi? (8 puan)

c) W, $\mathbb{R}^3$ ün bir bazı mıdır? (4 puan)

2) $U=\{\underbrace{(1,0,1)}_{u_1},\underbrace{(1,-1,-1)}_{u_2},\underbrace{(1,1,2)}_{u_3}\}$

$$v_1=u_1=(1,0,1)$$

$$v_2=u_2-\frac{\langle u_2,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}v_1=(1,-1,-1)-0.(1,0,1)=(1,-1,-1)$$

$$v_3=u_3-\frac{\langle u_3,v_2\rangle}{\langle v_2,v_2\rangle}v_2-\frac{\langle u_3,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}v_1=(1,1,2)-\frac{-2}{3}(1,-1,-1)-\frac{3}{2}(1,0,1)=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3},-\frac{1}{6}\right)$$

$\Rightarrow \{v_1,v_2,v_3\}$ ortogonal küme

$$w_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad w_2=\frac{v_2}{\|v_2\|}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$w_3=\frac{v_3}{\|v_3\|}=\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

$\Rightarrow \{w_1,w_2,w_3\}$ ortonormal küme

3) $\forall x\in V$ için $\langle x,y\rangle=0_V$ olduğunu kabul edelim. $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ ve $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ ise V nin standart bazı olsun. Bu durumda, $\langle e_i,y\rangle=y_i$, $i=1,2,\ldots,n$ olur. Kabulden $y_i=0$, $1,2,\ldots,n$ elde edilir. Bu ise $y=(0,0,\ldots,0)=0_V$ olması demektir.

4) a) $L(2t^2-5t+3)\underset{(L\text{ lineer})}{=}2L(t^2)-5L(t)+3L(1)=2(t^3+t)-5t^2+3.1=2t^3-5t^2+2t+3$

b) $L(at^2+bt+c)\underset{(L\text{ lineer})}{=}aL(t^2)+bL(t)+cL(1)=a(t^3+t)+bt^2+c.1=at^3+bt^2+at+c$

5) a) $c_1(1,-1,6)+c_2(0,1,-1)+c_3(0,0,-1)=(0,0,0)$ olsun.

$\Rightarrow (c_1,-c_1+c_2,6c_1-c_2-c_3)=(0,0,0)\Rightarrow c_1=0,\ -c_1+c_2=0,\ 6c_1-c_2-c_3=0$

$\Rightarrow c_1=c_2=c_3=0$ olup W lineer bağımsızdır.

b) $\text{boy}\,\mathbb{R}^3=3=s(W)$ ve W lineer bağımsız $\Rightarrow$ $\text{sp}\,W=\mathbb{R}^3$

c) W lineer bağımsız ve $\text{sp}\,W=\mathbb{R}^3\Rightarrow W$, $\mathbb{R}^3$ için bir bazıdır.